

一、向量的概念

要点一：向量的概念

1-向量:既有大小又有方向的量叫做向量.

2-数量:只有大小,没有方向的量(如年龄、身高、长度、面积、体积和质量等),称为数量.

3-向量与数量的区别:数量与数量之间可以比较大小,而向量与向量之间不能比较大小.

要点二：向量的表示法

1-有向线段:具有方向的线段叫做有向线段,有向线段包含三个要素:起点、方向、长度.

2-向量的表示方法:

(1)字母表示法:如 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 等.

(2)几何表示法:以A为始点, B为终点作有向线段 \overrightarrow{AB} (注意始点一定要写在终点的前面). 如果用一条有向线段 \overrightarrow{AB} 表示向量, 通常我们就说向量 \overrightarrow{AB} .

要点三：向量的有关概念

1-向量的模:向量的大小叫向量的模(就是用来表示向量的有向线段的长度).

要点诠释:

(1) 向量 \vec{a} 的模 $|\vec{a}| \geq 0$.

(2) 向量不能比较大小, 但 $|\vec{a}|$ 是实数, 可以比较大小.

2-零向量:长度为零的向量叫零向量.记作 $\vec{0}$, 它的方向是任意的.

3-单位向量:长度等于1个单位的向量.

(1) 在画单位向量时, 长度1可以根据需要任意设定;

(2) 将一个向量除以它的模, 得到的向量就是一个单位向量, 并且它的方向与该向量相同.

4-相等向量:长度相等且方向相同的向量.

在平面内, 相等的向量有无数多个, 它们的方向相同且长度相等.

要点四：向量的共线或平行

方向相同或相反的非零向量, 叫共线向量(共线向量又称为平行向量).

规定: $\vec{0}$ 与任一向量共线.

要点诠释:

1.零向量的方向是任意的, 注意0与 $\vec{0}$ 的含义与书写区别.

2.共线向量与相等向量的关系:相等向量一定是共线向量, 但共线向量不一定是相等的向量.

【典型例题】

类型一：向量的基本概念

习题1-下列各题中，哪些是向量？哪些不是向量？

- (1) 密度； (2) 浮力； (3) 风速； (4) 温度.

【思路点拨】抓住向量的两个特征：长度和方向进行辨析.

【解析】浮力和风速既有大小又有方向，所以是向量，其他的量只有大小没有方向，不是向量. 故 (2) (3) 是向量，(1) (4) 不是向量.

【总结升华】实际问题中的一些量，如温度、电量等，尽管它们有正、负之分，但没有方向，故表示数量，而向量是一个既有大小又有方向的量，如位移、速度、加速度、力等. 向量和数量是有本质区别的两个概念.

习题2-下列物理量中，不能称为向量的是 ()

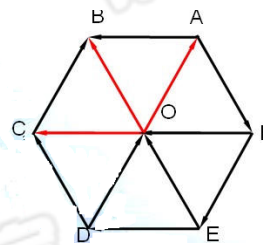
- A. 质量 B. 速度 C. 位移 D. 力

【答案】A

类型二：向量的表示方法

习题3-如图的正六边形中，O是中点，则

- (1) 与向量 \overrightarrow{OA} 相等的向量有多少个？并把这些向量写出来.
(2) 是否存在与向量 \overrightarrow{OA} 长度相等、方向相反向量？
(3) 与向量 \overrightarrow{OA} 共线的向量有哪些？



【解析】(1) 3个 \overrightarrow{CB} 、 \overrightarrow{DO} 、 \overrightarrow{EF} (2) 存在 \overrightarrow{OD} 、 \overrightarrow{FE} 、 \overrightarrow{AO} 、 \overrightarrow{BC}
(3) 向量 \overrightarrow{OA} 共线的向量有： \overrightarrow{AO} 、 \overrightarrow{BC} 、 \overrightarrow{CB} 、 \overrightarrow{OD} 、 \overrightarrow{DO} 、 \overrightarrow{EF} 、 \overrightarrow{FE} .

类型三：利用向量相等或共线进行证明

习题4-如图所示，四边形ABCD中， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，N、M分别是AD、BC上的点，且 $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA}$.

求证： $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB}$.

【思路点拨】证明 $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB}$ ，要证明这两个向量的方向相同和大小相等.

【证明】 $\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ， $\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 且 $AB \parallel CD$,

\therefore 四边形ABCD是平行四边形，

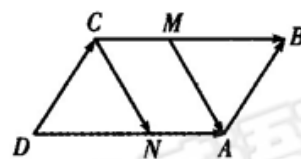
$\therefore \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ 且 $DA \parallel CB$.

又 $\because \overrightarrow{DA}$ 与 \overrightarrow{CB} 的方向相同， $\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

同理可证，四边形CNAM是平行四边形， $\therefore \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NA}$.

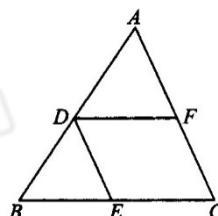
$\therefore |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DA}|$ ， $|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{NA}|$ ， $\therefore |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{DN}|$ ，

又 \overrightarrow{DN} 与 \overrightarrow{MB} 的方向相同， $\therefore \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$.



习题5-如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知向量 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ ， $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$ ，求证： $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.

【解析】因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ ，所以D为AB的中点. 又 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$ ，所以 $DF \parallel BE$ 且



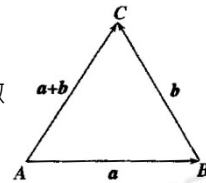
$DF = BE$, 所以 F 为 AC 的中点, 则 DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 从而 E 是 BC 的中点, 所以 $DE \parallel AF$, 且 $DE = AF$. 又 DE 与 AF 不共线, 所以 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.

二、向量的加减法运算

要点一: 向量加法的三角形法则与平行四边形法则

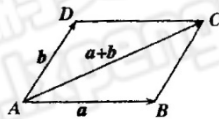
1-向量加法的三角形法则

已知向量 \vec{a} , \vec{b} , 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 再作向量 \overrightarrow{AC} , 则向量 \overrightarrow{AC} 叫做 \vec{a} 与 \vec{b} 的和, 记作 $\vec{a} + \vec{b}$, 即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. 如图



2-向量加法的平行四边形法则

已知两个不共线向量 \vec{a} , \vec{b} , 作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 A, B, D 三点不共线, 以 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则对角线 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. 这个法则叫做两个向量求和的平行四边形法则.



求两个向量的和的运算, 叫做向量的加法.

对于零向量与任一向量 \vec{a} , 我们规定 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

要点诠释:

两个向量的和与差仍是一个向量, 可用平行四边形或三角形法则进行运算, 但要注意向量的起点与终点.

要点二: 向量求和的多边形法则及加法运算律

1-向量求和的多边形法则的概念

已知 n 个向量, 依次把这 n 个向量首尾相连, 以第一个向量的起点为起点, 第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这 n 个向量的和向量. 这个法则叫做向量求和的多边形法则.

$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

特别地, 当 A_1 与 A_n 重合, 即一个图形为封闭图形时, 有 $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{0}$

2-向量加法的运算律

(1) 交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

(2) 结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

要点三: 向量的减法

1-向量的减法

(1) 如果 $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$, 则向量 \vec{x} 叫做 \vec{a} 与 \vec{b} 的差, 记作 $\vec{a} - \vec{b}$, 求两个向量差的运算, 叫做向量的减法. 此定义是向量加法的逆运算给出的.

相反向量: 与向量 \vec{a} 方向相反且等长的向量叫做 \vec{a} 的相反向量.

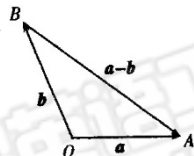
(2) 向量 \vec{a} 加上 \vec{b} 的反向量, 叫做 \vec{a} 与 \vec{b} 的差, 即 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. 求两个向量差的运算, 叫做向量的减法, 此定义是利用相反向量给出的, 其实质就是把向量减法化为向量加法.

要点诠释:

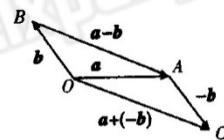
- (1) 两种方法给出的定义其实质是一样的.
- (2) 对于相反向量有 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$; 若 \vec{a}, \vec{b} 互为相反向量, 则 $\vec{a}=-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.
- (3) 两个向量的差仍是一个向量.

2-向量减法的作图方法

(1) 已知向量 \vec{a}, \vec{b} (如图), 作 $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$, 则 $\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{OA}-\vec{OB}$, 即向量 \vec{BA} 等于终点向量 (\vec{OA}) 减去起点向量 (\vec{OB}). 利用此方法作图时, 把两个向量的始点放在一起, 则这两个向量的差是以减向量的终点为始点的, 被减向量的终点为终点的向量.



(2) 利用相反向量作图, 通过向量加法的平行四边形法则作出 $\vec{a}-\vec{b}$. 作 $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}, \vec{AC}=-\vec{b}$, 则 $\vec{OC}=\vec{a}+(-\vec{b})$, 如图. 由图可知, 一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量.



要点四: 向量的三角形不等式

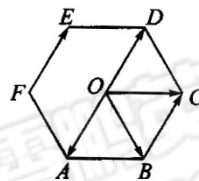
由向量的三角形法则, 可以得到

- (1) 当 \vec{a}, \vec{b} 不共线时, $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}|+|\vec{b}|$;
- (2) 当 \vec{a}, \vec{b} 同向且共线时, $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$ 同向, 则 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
- (3) 当 \vec{a}, \vec{b} 反向且共线时, 若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, 则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 \vec{a} 同向, $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}|-|\vec{b}|$; 若 $|\vec{a}| < |\vec{b}|$, 则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 \vec{b} 同向, $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|$.

要点一: 向量加法的几何运算

习题6-如图, O为正六边形ABCDEF的中心, 作出下列向量:

- (1) $\vec{OA}+\vec{OC}$;
- (2) $\vec{BC}+\vec{FE}$;
- (3) $\vec{OA}+\vec{FE}$.



【解析】(1) 由图知, OABC为平行四边形, $\therefore \vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}$

(2) 由图知 $\vec{BC}=\vec{FE}=\vec{OD}=\vec{AO}$, $\therefore \vec{BC}+\vec{FE}=\vec{AO}+\vec{OD}=\vec{AD}$.

(3) $\therefore \vec{OD}=\vec{FE}$, $\therefore \vec{OA}+\vec{FE}=\vec{OA}+\vec{OD}$.

又 $\vec{OA}=\vec{DO}$, $\therefore \vec{OA}+\vec{FE}=\vec{DO}+\vec{OD}$.

【总结升华】利用向量加法的平行四边形法则或三角形法则求两个向量的和向量, 注意当两个向量共线时, 三角形法则仍适用, 而平行四边形法则不适用.

习题7-在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F . 若 $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{BD} = \vec{b}$, 则 $\vec{AF} =$ ()

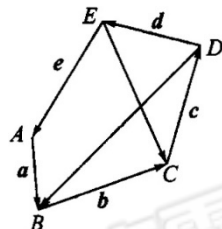
- A. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ D. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【答案】 B

类型二: 向量减法的几何运算

习题8-如图, 解答下列各题:

- (1) 用 \vec{a} , \vec{d} , \vec{e} 表示 \vec{DB} ; (2) 用 \vec{b} , \vec{c} 表示 \vec{DB} ;
 (3) 用 \vec{a} , \vec{b} , \vec{e} 表示 \vec{EC} ; (4) 用 \vec{d} , \vec{c} 表示 \vec{EC} .



【答案】 (1) $\vec{d} + \vec{e} + \vec{a}$ (2) $-\vec{b} - \vec{c}$ (3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{e}$ (4) $-\vec{c} - \vec{d}$

【解析】 $\because \vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$, $\vec{DE} = \vec{d}$, $\vec{EA} = \vec{e}$,

(1) $\vec{DB} = \vec{DE} + \vec{EA} + \vec{AB} = \vec{d} + \vec{e} + \vec{a}$.

(2) $\vec{DB} = \vec{CB} - \vec{CD} = -\vec{BC} - \vec{CD} = -\vec{b} - \vec{c}$.

(3) $\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{e}$.

(4) $\vec{EC} = -\vec{CE} = -(\vec{CD} + \vec{DE}) = -\vec{c} - \vec{d}$.

【总结升华】 在本题中, 我们看到 \vec{DB} , \vec{EC} 这两个向量的表示并不唯一. 在解决这类问题时, 要注意向量加法、减法和共线(相等)向量的应用. 当运用三角形法则时, 要注意两向量首尾相接, 当两个向量起点相同时, 可以考虑用减法.

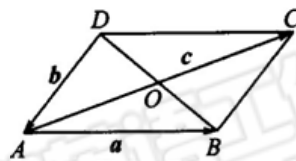
习题9- O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 设 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则 \vec{DE} 等于 () .

- (A) $\vec{a} + \vec{b}$ (B) $\vec{a} - \vec{b}$ (C) $\vec{b} - \vec{a}$ (D) $-\vec{a} - \vec{b}$

【答案】 B

习题10-如图所示, O 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 的交点, 设 $\vec{AB} = \vec{a}$,

$\vec{DA} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$. 求证: $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} = \vec{OA}$.



【解析】 $\because \vec{b} + \vec{c} = \vec{DA} + \vec{OC} = \vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB}$, $\vec{OA} + \vec{a} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, $\therefore \vec{b} + \vec{c} = \vec{OA} + \vec{a}$, 即 $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} = \vec{OA}$.

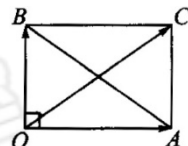
类型三: 与向量的模有关的问题

习题11-已知非零向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{7} + 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{7} - 1$, 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值.

【解析】 如图, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\vec{BA} = |\vec{a} - \vec{b}|$.

以 OA 与 OB 为邻边作平行四边形 $OACB$, 则 $|\vec{OC}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

由于 $(\sqrt{7} + 1)^2 + (\sqrt{7} - 1)^2 = 4^2$.



$$\text{故 } |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2.$$

所以 $\triangle OAB$ 是 $\angle AOB$ 为 90° 的直角三角形, 从而 $OA \perp OB$, 所以四边形 $OACB$ 是矩形.

根据矩形的对角线相等有 $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| = 4$, 即 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$.

【总结升华】 (1) 向量 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ 的几何意义在证明、运算中具有重要的应用. 对于平行四边形、菱形、矩形、正方形对角线具有的性质要熟悉并会应用.

(2) 关于向量的加减法运算除掌握法则外, 还应注意一些特殊情况, 如零向量、共线向量等. 要注意到向量的加法和求模运算的次序不能交换, 即两个向量和的模不一定等于这两个向量的模的和. 因为向量的加法实施的对象是向量, 而模是数量, 模的加法是数量的加法.

习题12-若 $|\overrightarrow{AB}| = 9$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$, 则 $|\overrightarrow{BC}|$ 的取值范围是多少?

【答案】 $5 \leq |\overrightarrow{BC}| \leq 13$

【解析】 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

当 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} 同向时, $|\overrightarrow{BC}| = |9 - 4| = 5$,

当 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} 反向时, $|\overrightarrow{BC}| = |9 + 4| = 13$;

当 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} 不共线时, $5 < |\overrightarrow{BC}| < 13$.

综上所述, $5 \leq |\overrightarrow{BC}| \leq 13$