一、向量的概念

要点一：向量的概念

1-向量:既有大小又有方向的量叫做向量.

2-数量：只有大小，没有方向的量（如年龄、身高、长度、面积、体积和质量等），称为数量.

3-向量与数量的区别：数量与数量之间可以比较大小，而向量与向量之间不能比较大小.

要点二：向量的表示法

1-有向线段：具有方向的线段叫做有向线段，有向线段包含三个要素：起点、方向、长度.

2-向量的表示方法:

(1)字母表示法:如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等.

(2)几何表示法:以A为始点，B为终点作有向线段$\overrightarrow{AB}$（注意始点一定要写在终点的前面）．如果用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量，通常我们就说向量$\overrightarrow{AB}$.

要点三：向量的有关概念

1-向量的模:向量的大小叫向量的模(就是用来表示向量的有向线段的长度).

要点诠释：

（1）向量$\vec{a}$的模$|\vec{a}|\geq 0$.

（2）向量不能比较大小，但$|\vec{a}|$是实数，可以比较大小.

2-零向量:长度为零的向量叫零向量.记作$\vec{0}$，它的方向是任意的.

3-单位向量:长度等于1个单位的向量.

（1）在画单位向量时，长度1可以根据需要任意设定；

（2）将一个向量除以它的模，得到的向量就是一个单位向量，并且它的方向与该向量相同.

4-相等向量:长度相等且方向相同的向量.

在平面内，相等的向量有无数多个，它们的方向相同且长度相等.

要点四：向量的共线或平行

方向相同或相反的非零向量，叫共线向量(共线向量又称为平行向量).

规定:$\vec{0}$与任一向量共线.

要点诠释：

1.零向量的方向是任意的，注意0与0的含义与书写区别.

2.共线向量与相等向量的关系：相等向量一定是共线向量，但共线向量不一定是相等的向量.

【典型例题】

类型一：向量的基本概念

习题1-下列各题中，哪些是向量？哪些不是向量？

（1）密度；（2）浮力；（3）风速；（4）温度.

【思路点拨】抓住向量的两个特征：长度和方向进行辨析.

【解析】浮力和风速既有大小又有方向，所以是向量，其他的量只有大小没有方向，不是向量．故（2）（3）是向量，（1）（4）不是向量.

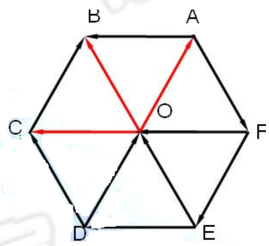
【总结升华】 实际问题中的一些量，如温度、电量等，尽管它们有正、负之分，但没有方向，故表示数量，而向量是一个既有大小又有方向的量，如位移、速度、加速度、力等．向量和数量是有本质区别的两个概念.

习题2-下列物理量中，不能称为向量的是（　）

A. 质量　B. 速度　C. 位移　D. 力

【答案】 A

类型二：向量的表示方法



习题3-如图的正六边形中，O是中点，则

（1）与向量$\overrightarrow{OA}$相等的向量有多少个？并把这些向量写出来.

（2）是否存在与向量$\overrightarrow{OA}$长度相等、方向相反向量？

（3）与向量$\overrightarrow{OA}$共线的向量有哪些？

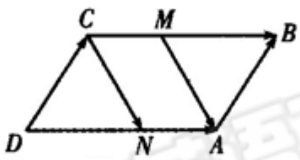
【解析】（1）3个 $\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{DO}$、$\overrightarrow{EF}$（2）存在 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{BC}$

（3）向量$\overrightarrow{OA}$共线的向量有：$\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{DO}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{FE}$.

类型三：利用向量相等或共线进行证明

习题4-如图所示，四边形ABCD中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，N、M分别是AD、BC上的点，且$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$.

求证：$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.



【思路点拨】证明$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$，要证明这两个向量的方向相同和大小相等.

【证明】 $\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$且$AB//CD$,

$\therefore$四边形ABCD是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$且$DA//CB$.

又$\because \overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{CB}$的方向相同，$\therefore \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

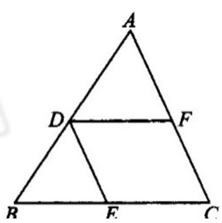
同理可证，四边形CNAM是平行四边形，$\therefore \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NA}$.

$\because |\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DA}|$，$|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{NA}|$，$\therefore |\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{DN}|$,

又$\overrightarrow{DN}$与$\overrightarrow{MB}$的方向相同，$\therefore \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DN}$.

习题5-如图，在△ABC中，已知向量$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$，求证：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

【解析】因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，所以$D$为$AB$的中点．又$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$，所以$DF//BE$且

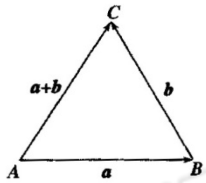


$DF=BE$，所以F为AC的中点，则DF是$\triangle ABC$的中位线，从而E是BC的中点，所以$DE//AF$，且$DE=AF$．又DE与AF不共线，所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$．

二、向量的加减法运算

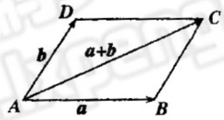
要点一：向量加法的三角形法则与平行四边形法则

1-向量加法的三角形法则



已知向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，在平面内任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，再作向量$\overrightarrow{AC}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的和，记作$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，即$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$．如图

2-向量加法的平行四边形法则



已知两个不共线向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$，则$A,B,D$三点不共线，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$为邻边作平行四边形$ABCD$，则对角线$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$．这个法则叫做两个向量求和的平行四边形法则．

求两个向量和的运算，叫做向量的加法．

对于零向量与任一向量$\overrightarrow{a}$，我们规定$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$．

要点诠释：

两个向量的和与差仍是一个向量，可用平行四边形或三角形法则进行运算，但要注意向量的起点与终点．

要点二：向量求和的多边形法则及加法运算律

1-向量求和的多边形法则的概念

已知n个向量，依次把这n个向量首尾相连，以第一个向量的起点为起点，第n个向量的终点为终点的向量叫做这n个向量的和向量．这个法则叫做向量求和的多边形法则．

$\overrightarrow{A_1A_n}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

特别地，当A_1与A_n重合，即一个图形为封闭图形时，有$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{0}$

2-向量加法的运算律

（1）交换律：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$；

（2）结合律：（$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$）$+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+$（$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$）

要点三：向量的减法

1-向量的减法

（1）如果$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}$，则向量$\overrightarrow{x}$叫做$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的差，记作$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$，求两个向量差的运算，叫做向量的减法．此定义是向量加法的逆运算给出的．

相反向量：与向量$\overrightarrow{a}$方向相反且等长的向量叫做$\overrightarrow{a}$的相反向量．

（2）向量$\vec{a}$加上$\vec{b}$的相反向量，叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，即$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$．求两个向量差的运算，叫做向量的减法，此定义是利用相反向量给出的，其实质就是把向量减法化为向量加法．

要点诠释：

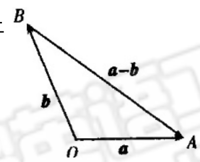
（1）两种方法给出的定义其实质是一样的．

（2）对于相反向量有$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$；若$\vec{a}$，$\vec{b}$互为相反向量，则$\vec{a}=-\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$．

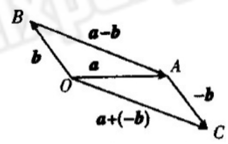
（3）两个向量的差仍是一个向量．

2-向量减法的作图方法

（1）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$（如图），作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$,即向量$\overrightarrow{BA}$等于终点向量（$\overrightarrow{OA}$）减去起点向量（$\overrightarrow{OB}$）．利用此方法作图时，把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为始点的，被减向量的终点为终点的向量．



（2）利用相反向量作图，通过向量加法的平行四边形法则作出$\vec{a}-\vec{b}$．作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=-\vec{b}$，则$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+(-\vec{b})$，如图．由图可知，一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量．



要点四：向量的三角形不等式

由向量的三角形法则，可以得到

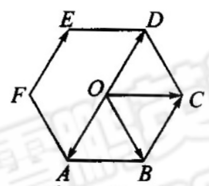
(1)当$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线时，$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(2)当$\vec{a}$，$\vec{b}$同向且共线时，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$同向，则$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(3) 当$\vec{a}$，$\vec{b}$反向且共线时，若$|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$同向，$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|-|\vec{b}|$；若$|\vec{a}|<|\vec{b}|$，则$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{b}$同向，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|$．

要点一：向量加法的几何运算

习题6-如图，O为正六边形ABCDEF的中心，作出下列向量：



（1）$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$；（2）$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$；（3）$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}$.

【解析】（1）由图知，OABC为平行四边形，$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$

（2）由图知$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}$，$\therefore\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$.

（3）$\because\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{FE}$，$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$.

又$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DO}$，$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OD}$.

【总结升华】利用向量加法的平行四边形法则或三角形法则求两个向量的和向量，注意当两个向量共线时，三角形法则仍适用，而平行四边形法则不适用．

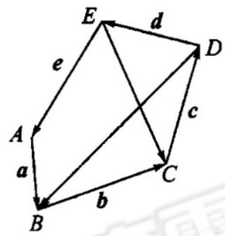
习题7-在平行四边形$ABCD$中，AC与BD交于点O，E是线段OD的中点，AE的延长线与CD交于点F．若$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{b}$，则$\overrightarrow{AF}=$（　）

A. $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b$　B. $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$　C. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b$　D. $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$

【答案】B

类型二：向量减法的几何运算

习题8-如图，解答下列各题：



（1）用$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{e}$表示$\overrightarrow{DB}$；　（2）用$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$表示$\overrightarrow{DB}$；

（3）用$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{e}$表示$\overrightarrow{EC}$；　（4）用$\overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{c}$表示$\overrightarrow{EC}$．

【答案】（1）$\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e}+\overrightarrow{a}$　（2）$-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$　(3)$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{e}$　（4）$-\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}$

【解析】　$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{d}$，$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{e}$，

（1）$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e}+\overrightarrow{a}$．

（2）$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$．

（3）$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{e}$．

（4）$\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{CE}=-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})=-\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}$．

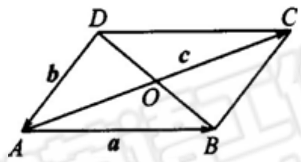
【总结升华】在本题中，我们看到$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{EC}$这两个向量的表示并不唯一．在解决这类问题时，要注意向量加法、减法和共线（相等）向量的应用．当运用三角形法则时，要注意两向量首尾相接，当两个向量起点相同时，可以考虑用减法．

习题9-O为正六边形$ABCDEF$的中心，设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a},\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$，则$\overrightarrow{DE}$等于（　）．

（A）$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$　　（B）$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$　　（C）$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$　　（D）$-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

【答案】B

习题10-如图所示，O是平行四边形$ABCD$的对角线AC、BD的交点，设$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$．求证：$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$．

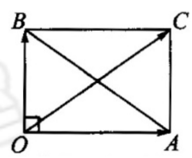


【解析】　$\because\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，　$\therefore\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{a}$，即$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$．

类型三：与向量的模有关的问题

习题11-已知非零向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$满足$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{7}+1$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{7}-1$，且$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=4$，求$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$的值．

【解析】　如图，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$，则$\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$．



以OA与OB为邻边作平行四边形$OACB$，则$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$．

由于$(\sqrt{7}+1)^2+(\sqrt{7}-1)^2=4^2$．

故$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2$.

所以$\triangle OAB$是$\angle AOB$为90^0的直角三角形，从而$OA\perp OB$，所以四边形$OACB$是矩形.

根据矩形的对角线相等有$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=4$，即$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=4$.

【总结升华】（1）向量$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$的几何意义在证明、运算中具有重要的应用．对于平行四边形、菱形、矩形、正方形对角线具有的性质要熟悉并会应用.

（2）关于向量的加减法运算除掌握法则外，还应注意一些特殊情况，如零向量、共线向量等．要注意到向量的加法和求模运算的次序不能交换，即两个向量和的模不一定等于这两个向量的模的和．因为向量的加法实施的对象是向量，而模是数量，模的加法是数量的加法.

习题12-若$|\overrightarrow{AB}|=9$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，则$|\overrightarrow{BC}|$的取值范围是多少?

【答案】$5\le|\overrightarrow{BC}|\le 13$

【解析】$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$同向时，$|\overrightarrow{BC}|=|9-4|=5$，

当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$反向时，$|\overrightarrow{BC}|=|9+4|=13$；

当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$不共线时，$5<|\overrightarrow{BC}|<13$.

综上所诉，$5\le|\overrightarrow{BC}|\le 13$