2020年暑假新高一数学

2020年8月3日（周一） 精讲笔记

1-比较实数a，b的大小

(1)文字叙述

如果a－b是正数，那么a>b；

如果a－b为0，那么a＝b；

如果a－b是负数，那么a<b，反之也成立.

(2)符号表示

a－b>0⇔a>b；a－b＝0⇔a＝b；a－b<0⇔a<b.

2-常用的不等式的基本性质

（1）a>b,b>c⇒a＞c(传递性)；

（2）a>b⇔b＜a；

（3）a-b>0⇒ a>b（作差法）

（4）a+b>c⇒a>c-b（移项法则）

（5）a>b,c>d, ⇒a+c>b+d(综合法)

（6）a>b>0,c>d>0⇒ac>bd(综合法)

（7）a>b>0, √a>√b(反证法)

习题1-(1)$a<b<0$，求证：$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$；

(2)已知$a>b$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，求证：$ab>0$.

【解析】 (1)由于$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{(b+a)(b-a)}{ab}$

$\because a<b<0$，

$\therefore b+a<0$，$b-a>0$，$ab>0$，

$\therefore \frac{(b+a)(b-a)}{ab}<0$，故$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$.

(2)$\because \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，

即$\frac{b-a}{ab}<0$，

而$a>b$，

$\therefore b-a<0$,

$\therefore ab>0$.

总结　在不等式的各性质中，乘法的性质极易出错，即在不等式两边同乘或除以一个数时，必须要确定该数是正数、负数或零，否则结论就不确定.

习题2-若$a>b>0$，$c<d<0$，则一定有(　　)

A.$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　　　　B.$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$

C.$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　　　　D.$\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

【解析】令$a=3$，$b=2$，$c=-3$，$d=-2$，则$=-1$，$=-1$，所以A，B错误；$\dfrac{a}{d}=-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{b}{c}=-\dfrac{2}{3}$，所以$\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$，所以C错误．故选D.

习题3-下列命题中的真命题为

（1）若$a>b$，则$ac^2>bc^2$；

（2）若$a<b<0$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

（3）若$a<b<0$，则$\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$；

（4）若$a<b<0$，则$\dfrac{b}{a}<1$；

（5）若$c>a>b>0$，则$\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$.

【解析】（1）$\because c^2\geq 0$，当$c=0$时$ac^2=bc^2=0$，故原命题为假命题.

（2）举特例$-2<-1<0$但$-\dfrac{1}{2}>-1$，故原命题为假命题.

（3）由于$a<b<0$，所以$\begin{cases}-a>-b>0\\ \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\end{cases}$，所以$\begin{cases}-a>-b>0\\ -\dfrac{1}{b}>-\dfrac{1}{a}>0\end{cases}$，$\therefore \dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}$，故原命题为假命题.

（4）$\because a<b<0$，$\therefore |a|>|b|>0$，$\therefore \dfrac{|b|}{|a|}<1$，$\therefore \dfrac{b}{a}<1$，故原命题为真命题.

（5）$\because c>a>b>0$，$\therefore \begin{cases}-a<-b\\ c>a\end{cases}$，$\therefore c-b>c-a>0$，$\therefore \dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0$，

又$\because a>b>0$，$\therefore \dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$，故原命题为真命题.

综上所诉（4）（5）为真命题

知识点二　利用不等式的性质求取值范围

习题4-已知$12<a<60,15<b<36$，求$a-b$及$\frac{a}{b}$的取值范围.

【解析】$\because 15<b<36$，

$\therefore -36<-b<-15$.

$\therefore 12-36<a-b<60-15$.

$\therefore -24<a-b<45$.

又$\frac{1}{36}<\frac{1}{b}<\frac{1}{15}$，$\therefore \frac{12}{36}<\frac{a}{b}<\frac{60}{15}$.

$\therefore \frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$.

综上，$-24<a-b<45$，$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$.

习题5-已知：$1\le a-b\le 2$且$2\le a+b\le 4$，求$4a-2b$的取值范围

【分析】设t=m（a-b）+n（a+b）=4a-2b

则m+n=4，n-m=-2，所以m=3，n=1

因为$1\le a-b\le 2$，所以$3\le 3（a-b）\le 6$

因为$2\le a+b\le 4$，所以$5\le 4a-2b\le 10$

习题7-设$M=x^2$，$N=-x-1$，则M与N的大小关系是(　　)

A．$M>N$　　　　　　B．$M=N$

C．$M<N$　　　D．与x有关

【解析】$M-N=x^2+x+1=^2+>0$.$\therefore M>N$.故选

规律方法　作差后变形是比较大小的关键一环，变形的方向是化成几个完全平方数和的形式或一些易判断符号的因式积的形式.

习题6-若实数a，b，c，满足$b+c=3a^2-4a+6$，$b-c=a^2-4a+4$，试确定a，b，c的大小关系

【解析】由已知$b-c=(a-2)^2\ge 0\Rightarrow b\ge c$，

由$\begin{cases} b+c=3a^2-4a+6 \\ b-c=a^2-4a+4 \end{cases}\Rightarrow c=a^2+1$

$\therefore c-a=a^2+1-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0\Rightarrow c>a$

综上所述，$b\ge c>a$

总结：作差法比较的一般步骤

第一步：作差；

第二步：变形，常采用配方、因式分解等恒等变形手段，将“差”化成“积”；

第三步：定号，就是确定是大于0，等于0，还是小于0.(不确定的要分情况讨论)

李霄鹏英语工作室 www.lxpenglish.com

最后得结论.

概括为“三步一结论”，这里的“定号”是目的，“变形”是关键.

3-不等式的解集与不等式组的解集

（1）不等式的解集：不等式的所有解组成的集合.

（2）不等式组的解集：对于由若干个不等式联立得到的不等式组来说，这些不等式的解集的交集称为不等式组的解集.

习题7- 解不等式组，并把解集在数轴上表示出来$\begin{cases}2x+1\geq-9\\ \frac{1}{2}x-2>2x+3\end{cases}$

【解析】第一个式子两边同时加上-1，得2x≥-10；

这个不等式左右两边同时乘以½，得x≥-5，因此第一个式子解集为[-5，+∞)

第二个式子两边同时乘以2，得x-4＞4x+6；

移项后得到3x＜-10，得x＜$-\dfrac{10}{3}$

又因为[-5，+∞) ∩（-∞，$-\dfrac{10}{3}$）=[-5，$-\dfrac{10}{3}$)

所以原不等式解集为[-5，$-\dfrac{10}{3}$)

习题8-解不等式 $\begin{cases}-2(x+3)\leq 4\\ \frac{3x-1}{2}>2x+1\end{cases}$

【解析】 $\begin{cases}-2(x+3)\leq 4 & ①\\ \frac{3x-1}{2}>2x+1 & ②\end{cases}$

解不等式①，得x≥-5；解不等式②，得x＜-3.

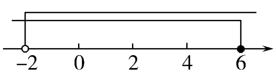
所以，不等式组的解集为[-5, -3).

习题9-满足不等式组的整数解

【解析】解不等式①，得x＞－2. 解不等式②，得x≤6.

∴原不等式组的解集为(－2,6].

∴原不等式组的整数解为{－1,0,1,2,3,4, 5,6}.



规律方法

(1)解不等式与解方程类似，不同之处在于系数化为1时，若不等式两边同时乘(或除)以一个负数，要改变不等号的方向.

(2)解不等式组的方法是分别解不等式组中各个不等式，再求出这些不等式的公共部分.解不等式组与解方程组截然不同，不能将两个不等式相加或相减，否则将可能出现错误.

4-绝对值不等式

一般地，含有绝对值的不等式称为绝对值不等式.

（1）当m>0时，

关于x的不等式|x|>m的解集为(－∞，－m)∪(m，＋∞)；

关于x的不等式|x|<m的解集为(－m，m).

习题10-解不等式$\left|3x-1\right|>x+3$

【解析】解此类不等式，要分3x-1≥0和3x-1<0两种情况进行讨论

当3x-1≥0，即x ≥ $\frac{1}{3}$时，原不等式为3x-1 $> x+3$，此时不等式的解为x>2

当3x-1<0，即x < $\frac{1}{3}$时，原不等式为1-3x $< x+3$，此时不等式的解为x<$-\frac{1}{2}$

综上所诉，不等式的解集为$\left\{x\,|\,\mathrm{x}<-\frac{1}{2}\text{或}\mathrm{x}>2\right\}$

习题11-解不等式：$\left|x+3\right|>\left|x-5\right|$

【解析】不等式左右同时平方得到（$x+3$）$^2>$ （$x-5$）^{2}，

开平方得到$x^2+6x+9>x^2-10x+25$

解得x>1，故原方程的解集为$\{x\,|\,\mathrm{x}>1\}$

习题12-设x ∈ R，则“$x^2-5x<0$”是“$\left|x-1\right|$<1”的（　）

A．充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C．充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【解析】分别求解一元二次不等式与绝对值的不等式，可得由“$x^2-5x<0$”→“$\left|x-1\right|$<1”，反之不成立，再结合充分必要条件的判定得到答案.

由$x^2-5x<0$，得0<x<5;由$\left|x-1\right|$<1，得$-1<x-1<1$，即0<x<2.

因为（0，2）是（0，5）得子集，由“$x^2-5x<0$”→“$\left|x-1\right|$<1”，反之不成立，

所以“$x^2-5x<0$”是“$\left|x-1\right|$<1”的必要不充分条件，故选B.

规律方法

形如|ax＋b|<c，|ax＋b|>c(c∈**R**)型不等式的解法

(1)当c>0时，|ax＋b|<c⇒－c<ax＋b<c；

|ax＋b|>c⇔ax＋b>c或ax＋b<－c.

(2)当$c=0$时，$|ax+b|<c$无解；

$|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b\neq 0$.

(3)当$c<0$时，$|ax+b|<c$无解.

$|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b$有意义.

5-数轴上两点间的距离公式及中点坐标公式

一般地，如 果实数a，b在数轴上对应的点分别为A和B，即A(a)，B(b)，则线段AB的长度为AB＝___|a－b|___.

特别地，若点M(x)是线段AB的中点，则x＝，即为数轴上的_中点坐标公式___

中点坐标公式的应用

习题13-设数轴上的点A与数3对应，点B与数x对应，已知线段AB的中点到原点的距离不大于5，求x的取值范围。

【解析】因为AB的中点对应的数为$\frac{3+x}{2}$，由题意可知$\left|\frac{3+x}{2}\right|\leq 5$，

即$|3+x|\leq 10$，因此$-10\leq 3+x\leq 10$，所以$-13\leq x\leq 7$，

因此x的取值范围为[-13,7]

6-求含参数的不等式（组）

含参数不等式就是指不等式中未知数前面是一个参数，而不是一个常数.

首先，对参数a的可能取值进行划分，可以将其划分为三种a>0、a=0、a<0

关于$ax>1(a\neq 0)$的解集

如果$\underline{a>0}$，那么$x>\frac{1}{a}$

如果$\underline{a<0}$，那么$x<\frac{1}{a}$

习题14-若不等式组$\begin{cases} x+a\geq 0 \\ 1-2x>x-2 \end{cases}$有解，则a的取值范围是______

【解析】由$x+a\geq 0$可得到$x\geq -a$

由$1-2x>x-2$，可得到$x<1$

若要求该不等式有解，则令$-a<1$，所以$a>-1$

故答案为$a>-1$

习题15-若不等式组$\begin{cases} x-a>0 \\ 1-x>2x-5 \end{cases}$有三个整数解，则a的取值范围是______

【解析】由$x-a>0$可得到$x>-a$

由$1-x>2x-5$可得到$x<2$

由于不等式组有三个整数解，所以不等式组的整数解为-1，0，1

则$-2 \le a < -1$