

1- 条件与结论

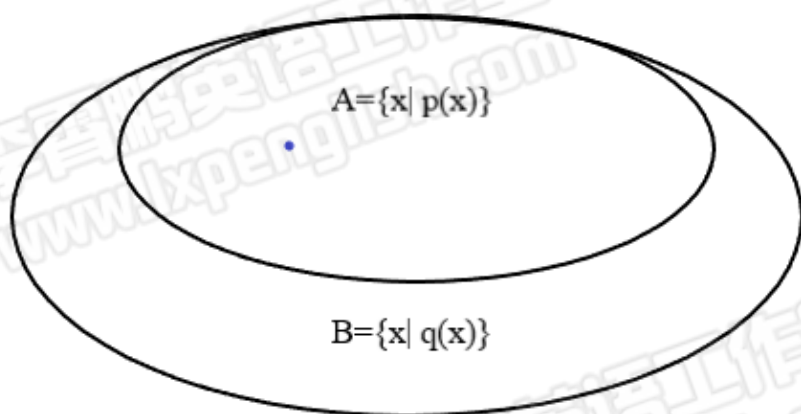
在“如果 p ,那么 q ”形式的命题中, p 称为命题的条件, q 称为命题的结论.

若“如果 p ,那么 q ”是一个真命题, 则称由 p 可以推出 q .记作 $p \Rightarrow q$, 读作 p 推出 q ;

若“如果 p ,那么 q ”是一个假命题, 则称由 p 不可以推出 q .记作 $p \not\Rightarrow q$, 读作 p 推不出 q .

2-充分条件、必要条件

当 $p \Rightarrow q$ 时, 我们称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件;当 $p \not\Rightarrow q$ 时, 我们称 p 不是 q 的充分条件, q 不是 p 的必要条件.



习题1-用符号“ \Rightarrow ”与“ $\not\Rightarrow$ ”填空:

(1) a, b 都是偶数 $\underline{\quad}$ $a+b$ 是偶数;

(2) $A \cap B = \emptyset$ $\underline{\quad}$ $A = \emptyset$;

(3) $xyz=0$ $\underline{\quad}$ $x=0$

【解析】(1)命题“若 a, b 都是偶数, 则 $a+b$ 是偶数”是真命题, 故 a, b 都是偶数 $\Rightarrow a+b$ 是偶数.

(2)命题“若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A = \emptyset$ ”是假命题, 故 $A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow A = \emptyset$.

(3)命题“若 $xyz=0$, 则 $x=0$ ”是假命题, 故 $xyz=0 \not\Rightarrow x=0$

习题2-下列说法是否正确?请说明理由.

(1)角A等于角B是角A与角B是对顶角的充分条件;

(2) $a > 0$ 且 $b > 0$ 是 $ab > 0$ 的充分条件;

(3)一个图形的对边平行是一个图形是平行四边形的必要条件;

(4) $c=0$ 是抛物线图像过原点的必要条件

【解析】

- (1)错误, 理由是角A等于角B \neq 角A与角B是对顶角
- (2)正确, 理由是 $a>0$ 且 $b>0 \Rightarrow ab>0$
- (3)正确, 理由是一个图形是平行四边形 \Rightarrow 一个图形的对边平行
- (4)正确, 理由是抛物线图像过原点 $\Rightarrow c=0$

习题3-下列命题中的真命题是()

- A. " $x>2$ 且 $y>3$ "是" $x+y>5$ "的充要条件
- B. "A与B的交集不是交集"是"A是B的真子集"的充要条件
- C. " $b^2-4ac<0$ "是一元二次不等式" $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 \mathbf{R} "的充要条件
- D. 一个三角形的三边满足勾股定理的充要条件是此三角形为直角三角形

【分析】对于A, " $x>2$ 且 $y>3$ " \Rightarrow " $x+y>5$ ", 但" $x+y>5$ "未必能推出" $x>2$ 且 $y>3$ ", 如 $x=0$ 且 $y=6$ 满足" $x+y>5$ "但不满足" $x>2$ ", 故A假. 对于B, " $A \cap B \neq \emptyset$ "未必能推出" $A \subsetneq B$ ". 如 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$. 故B为假. 对于C, " $b^2-4ac<0$ "是"一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 \mathbf{R} "的充要条件是假命题, 如一元二次不等式 $-2x^2+x-1>0$ 的解集为 \emptyset , 但满足 $b^2-4ac<0$. 对于D, 是真命题, 因为"一个三角形的三边满足勾股定理"能推出"此三角形为直角三角形", 条件不仅是必要的, 也是充分的, 故是充要的.

3-从集合角度理解充分条件必要条件

一般地, 如果 $A=\{x|p(x)\}$, $B=\{x|q(x)\}$, 且 $A \subseteq B$, 那么 $p(x) \Rightarrow q(x)$, 因此也就有 $p(x)$ 是 $q(x)$ 的充分条件, $q(x)$ 是 $p(x)$ 的必要条件.

4-充分不必要条件

一般地, 如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则称 p 是 q 的充分不必要条件.

如果 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则称 p 是 q 的必要不充分条件.

5.充要条件

如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则称 p 是 q 的充分必要条件简称为充要条件, 读作 p 与 q 等价.

如果 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

习题4-若 $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的值恒为正的充要条件是_____ , 恒为负的充要条件是_____.

【分析】一元二次方程的值恒为正, 则函数图像开口向上且与 x 轴无交点, 即 $a>0$ 且 $\Delta<0$;

若一元二次方程的值恒为负, 则函数图像开口向下且与 x 轴无交点, 即 $a<0$ 且 $\Delta<0$;

习题5-函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图象关于 y 轴对称的充要条件是_____.

【分析】 $f(x)$ 关于 y 轴对称 \Leftrightarrow

$$-\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

习题6-判断下列各题中 p 是 q 的什么条件

(1) $p: x=1, q: x-1=\sqrt{x-1}$;

(2) $p: \text{三角形是等边三角形}, q: \text{三角形是等腰三角形}$;

(3) $p: \frac{x}{y} > 1, q: x > y$;

(4) $p: \text{四边形是平行四边形}, q: \text{四边形的对边平行且相等}$.

【解析】 (1) 充分不必要条件

当 $x=1$ 时, $x-1=\sqrt{x-1}$ 成立;

当 $x-1=\sqrt{x-1}$ 时, $x=1$ 或 $x=2$.

(2) 充分不必要条件

\therefore 等边三角形一定是等腰三角形, 而等腰三角形不一定是等边三角形.

(3) 既不充分也不必要条件

$\frac{x}{y} > 1$
 $\therefore y$ 在 $y > 0$ 的条件下才有 $x > y$ 成立.

\therefore 充分性不成立, 同理必要性也不成立.

(4) 充要条件

当四边形是平行四边形时, 它的对边平行且相等; 当一个平行四边形对边平行且相等时, 这个四边形是平行四边形.

6-(1) 若 p 是 q 的充分条件, q 是 s 的充分条件, 即 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow s$, 则有 $p \Rightarrow s$, 即 p 是 s 的充分条件;

(2) 若 p 是 q 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 即 $q \Rightarrow p, s \Rightarrow q$, 则有 $s \Rightarrow p$, 即 p 是 s 的必要条件;

习题7-已知条件 $p: x^2+ax+1 \geq 0$, 条件 $q: x^2-3x+2 \leq 0$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

【解析】

解不等式 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ 得 $1 \leq x \leq 2$.

令 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + 1 \leq 0\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$,

$\therefore P$ 是 q 的充分不必要条件,

$\therefore P \Rightarrow q$, 即 $A \subseteq B$,

可知 $A = \emptyset$ 或方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 的两根要在区间 $[1, 2]$ 内,

$$\therefore \Delta = a^2 - 4 < 0 \text{ 或 } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 1 \leq -\frac{a}{2} \leq 2 \\ 4 + 2a + 1 \geq 0 \\ 1 + a + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ 的()}$$

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

【解析】 C 方法一.

设集合 $A = \{(x, y) \mid x \neq y\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 \neq y^2\}$

则对于坐标平面上的点集 $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, A 在 M 中的补集 $C = \{(x, y) \mid x = y\}$,

B 在 M 中的补集 $D = \{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$ 显然 $C \subseteq D$, 所以 $B \subseteq A$ 于是 " $x \neq y$ " 是 " $x^2 \neq y^2$ " 的必要不充分条件.

方法二

当 $x = -2, y = 2$ 时, $x \neq y$, 但此时 $x \neq y \nRightarrow x^2 \neq y^2$, 因为若 $x = y$, 则 $x^2 = y^2$,

故 $x^2 \neq y^2 \nRightarrow x \neq y$.

故 " $x \neq y$ " 是 " $x^2 \neq y^2$ " 的必要不充分条件.

规律方法 对于不等关系, 其包含的内容较多, 直接寻求 " $x \neq y$ " 与 " $x^2 \neq y^2$ " 的关系往往没有头绪, 因此可考虑构造集合, 从补集(即不等关系的对立面)的角度求解.

习题9-已知命题 $p: 1 - c < x < 1 + c (c > 0)$, 命题 $q: x > 7$ 或 $x < -1$, 并且 p 是 q 的既不充分又不必要条件, 则 c 的取值范围是_____.

【分析】 命题 p 对应的集合 $A = \{x \mid 1 - c < x < 1 + c, c > 0\}$, 同理, 命题 q 对应的集合 $B = \{x \mid x > 7 \text{ 或 } x < -1\}$. 因为 P 是

q 的既不充分又不必要条件, 所以 $\begin{cases} 1 - c \geq -1 \\ 1 + c \leq 7 \end{cases}$, ①或 $\begin{cases} 1 + c \geq -1 \\ 1 - c \leq 7 \end{cases}$, ②, 解①得 $c \leq 2$, 解②得 $c \geq -2$, 又 $c > 0$, 综上所述得 $0 < c \leq 2$.

易错警示>像这种已知集合包含关系，利用数轴直观解题，易出现忽视端点“等号成立”的情况。解题时可按如下口诀分两步走：“大致看关系，细致辨端点”

习题10-已知 $P: \left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2$ ， $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ ，若 P 是 q 的充分不必要条件，求 m 的取值范围。

【分析】由 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ 解得 $1 - m \leq x \leq 1 + m$

又由 $\left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2$ 解得 $-2 \leq x \leq 10$

p 是 q 的充分不必要条件，所以

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m \leq -2, \\ 1 + m > 10 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m < -2, \\ 1 + m \geq 10 \end{cases}$$

解得 $m \geq 9$